数论基础期末考试试题 (A)

2008, 6, 山东大学数学学院

1. 设正整数 a, b 满足 $[a,b]=144, (a,b)=24$ 且 $a \geq b$ ，求 a, b 的值.

2. (1) 求证：

$$\frac{n}{\phi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)},$$

其中 $\phi(n)$ 为欧拉函数， $\mu(n)$ 为 Mobius 函数.

(2) 求证：

$$\sum_{n\leq x} \frac{n}{\phi(n)} = O(x).$$

(3) 求证：

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{\phi(n)} = O(\log x).$$

3. (1) 设 $x > 1$, $f(t) \in C'[1,x]$, $S(x) = \sum_{n\leq x} g(n)$. 叙述 Abel 求和公式 $\sum_{n\leq x} f(n)g(n)$ (不用证明).

(2) 设 $x > 1$ ，利用 Abel 求和公式和

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

求证：存在常数 C ，使得

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

4. 解下列同余方程组,

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 5 \\ 3x \equiv 1 \pmod 7. \end{cases}$$

5. 确定对哪些素数 p, 二次同余方程 $x^2+3 \equiv 0 \pmod p$ 有解.

6. (1) 求素数 17 的原根个数和最小正原根.

(2) 设 g 为 17 的最小正原跟，计算以 g 为底的 16 对模 17 的指标 $\mathrm{ind}_g(16)$ 的值。

(3) 求解同余方程

$$x^{12} \equiv 16 \ (\mathrm{mod} 17).$$